



Uplifting Mathematics for All

Guia didàctica

Punts que exploten

(Exploding Dots™)

Experiència 1:

Les màquines

Visió general	2
La màquina $1 \leftarrow 2$	3
Material A: <i>La màquina $1 \leftarrow 2$</i>	8
Solucions a les preguntes de «Material A»	9
Altres màquines	10
Material B: <i>Altres màquines</i>	11
Solucions a les preguntes de «Material B»	12
La màquina $1 \leftarrow 10$	13
Material C: <i>Exploracions brutals</i>	15

Recursos relacionats

- Podeu accedir als vídeos i més recursos a [Exploding Dots - Global Math Project](#).
- Accedeix a [activitats guiades a Desmos](#).
- Joga en línia amb el giny de [Dhimad](#) (inclou àlgebra).

Visió general

Objectius de l'alumne

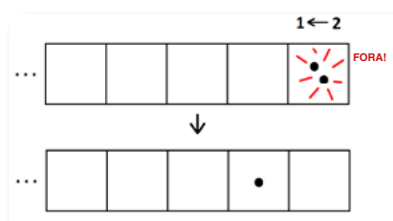
La introducció d'una màquina $1 \leftarrow 2$, juntament amb l'exploració d'altres màquines, presenta als alumnes sistemes que converteixen nombres en curiosos codis. Així, la introducció d'una màquina $1 \leftarrow 10$ fa pensar que potser aquests codis no són tan estranys com ho semblen a primera vista.

Breu resum de l'experiència

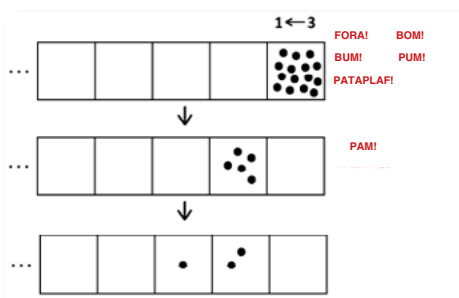
Aquesta introducció posa les bases d'unes matemàtiques amb sentit. Els alumnes podran estudiar les màquines de *Punts que exploten* i dominar la conversió de nombres en codis diversos, com ara el corresponent al 22, en una màquina $1 \leftarrow 3$, $1 \leftarrow 5$ o $1 \leftarrow 10$.

Vegem-ne uns exemples:

En una màquina $1 \leftarrow 2$, els parells de punts que hi ha en qualsevol casella «exploten» —és a dir, desapareixen— i esdevenen un punt a la casella de l'esquerra. (Això explica el nom de la màquina, $1 \leftarrow 2$, escrit així, a la inversa.) Veiem que dos punts es converteixen en un punt i zero punts, en una màquina $1 \leftarrow 2$. Diem, doncs, que el 2 té el codi *10* en la màquina $1 \leftarrow 2$.



En una màquina $1 \leftarrow 3$, el nombre 15 té el codi *120*.



I en una màquina $1 \leftarrow 10$, el nombre 273 té el codi... 273!

Introducció

Podeu veure el vídeo de benvinguda, en què James introdueix aquesta experiència, aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [0:20 minuts].



La màquina $1 \leftarrow 2$

Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:40 minuts].

Aquí hi ha el guió que segueix James quan explica la lliçó a la pissarra. No cal dir que podeu adaptar-lo com més us convingui. Al vídeo podreu veure quan i com dibuixa James els diagrames i com els va ampliant. També trobareu divertits els efectes sonors que fa.

Benvinguts a un viatge!

És un viatge a les matemàtiques basat en una història que he fet jo, James, i que és falsa.

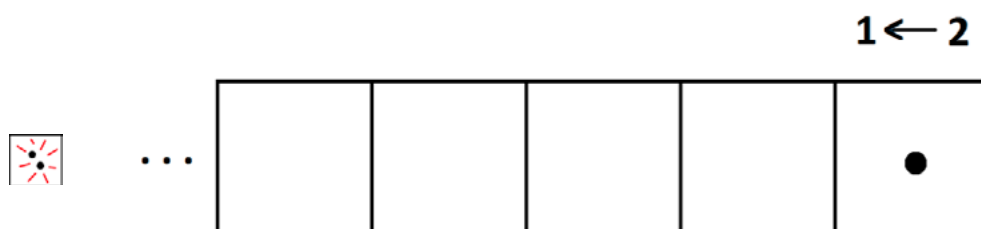
De petit vaig inventar una màquina —mentida— que no és més que una sèrie de caselles ampliable cap a l'esquerra fins on vulgueu.

A aquesta màquina meva li vaig posar un nom, *màquina $1 \leftarrow 2$* , ambdós nombres escrits i llegits a la inversa («[màquina] dos-u»), que és més divertit. (Com que era un nen, no n'era conscient.)



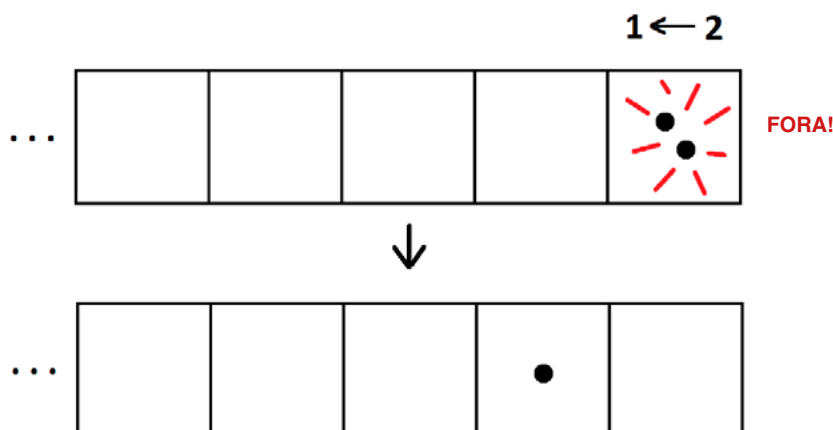
I què es pot fer amb aquesta màquina? Posar-hi punts. Els punts sempre van a la casella de més a la dreta.

Hi poso un punt i, bé, no passa res: es queda tal qual. Una mica avorrit...



Però si hi poso un segon punt —sempre a la casella de més a la dreta—, la cosa es torna interessant.

Quan tenim dos punts en una casella, exploten i desapareixen —FORA!— i són substituïts per un punt a la casella de l'esquerra.



(Veieu ara per què vaig anomenar-la *màquina* $1 \leftarrow 2$, escrit d'aquesta manera més divertida?)

Veiem que dos punts situats a la màquina generen un punt seguit de zero punts.

Si hi posem un tercer punt —sempre a la casella de més a la dreta—, tenim un punt seguit d'un punt.

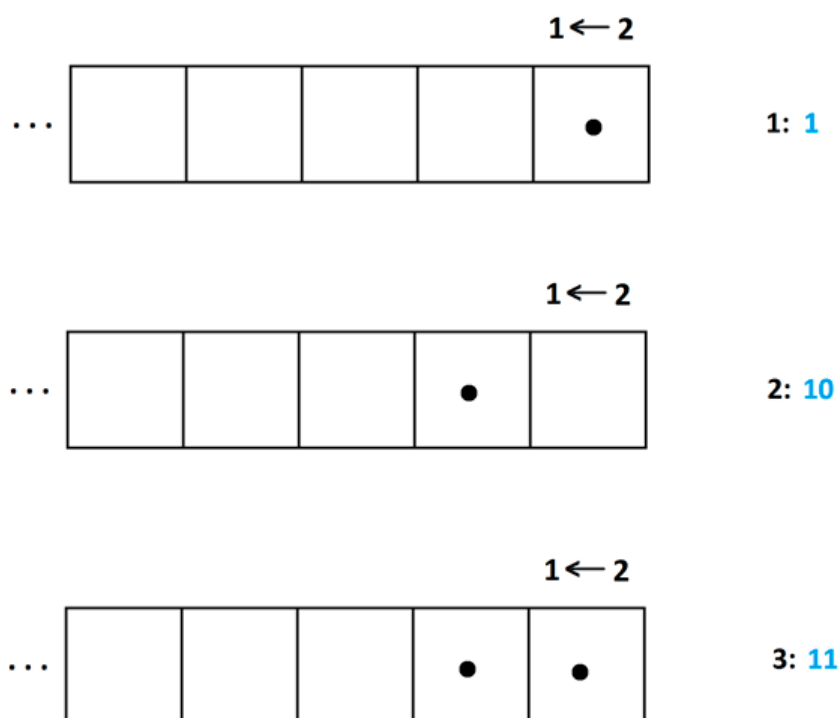



Vaig veure, en la meva història falsa, que aquesta màquina assignava codis als nombres.

Si poso un únic punt a la màquina, continua sent un punt. Suposem que el codi de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al nombre 1 és I .

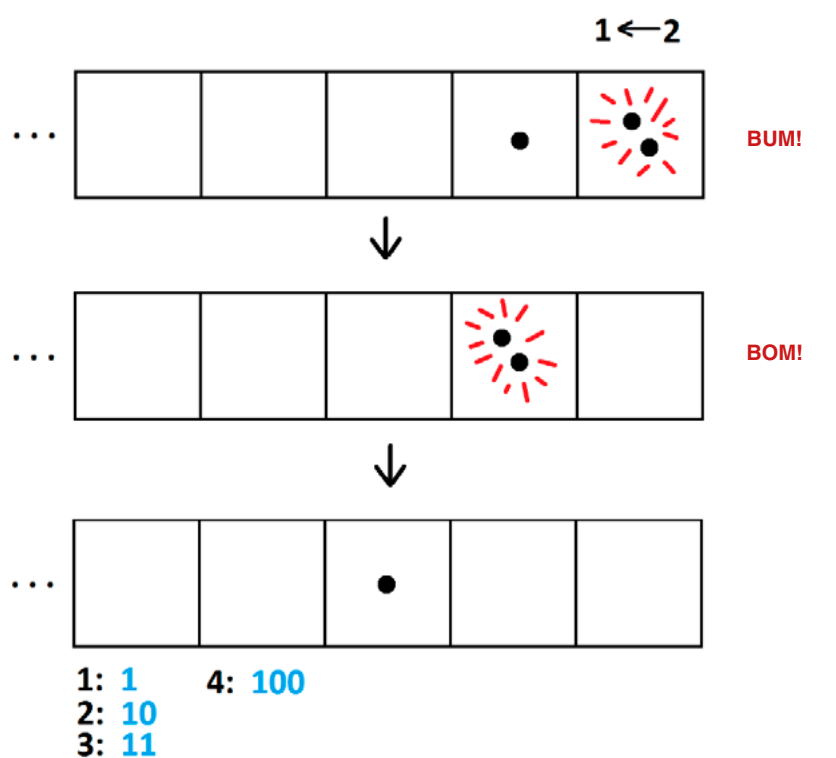
Si hi poso dos punts, un darrere l'altre, aquests generen un punt en una casella seguit de zero punts. Suposem que el codi de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al nombre 2 és 10 .

Si poso un tercer punt a la màquina, tenim el codi 11 per al 3.




 Quin és el codi de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al 4?

Posar un quart punt en la màquina és especialment interessant: ens esperen moltes explosions!



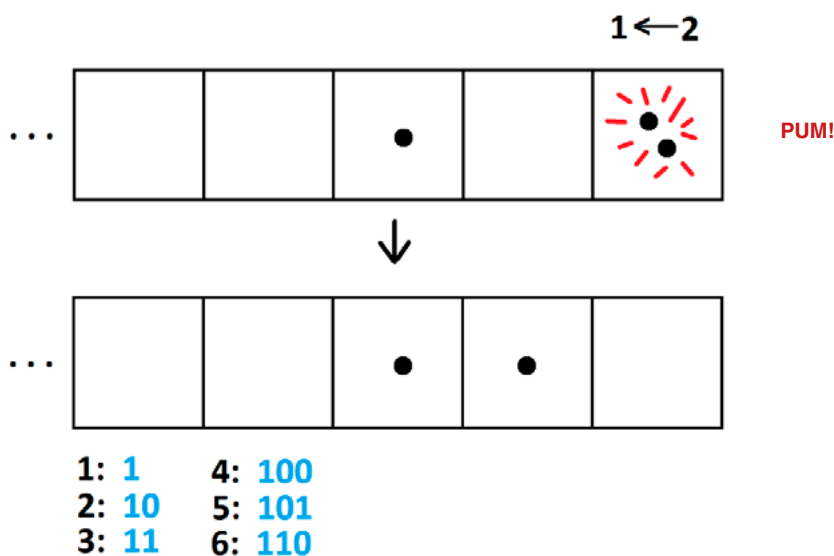
El codi $1 \leftarrow 2$ per al 4 és 100.

Normalment, arribats a aquest punt els alumnes més grans ja estan cridant «És binari!» o «És base dos!». Depenent del moment, faig com que no sento aquests crits, o bé els accepto, i els agraeixo la seva perspicàcia, però els dic que jo vaig necessitar més temps i que, personalment, he de pensar-hi amb més deteniment. (Al cap i a la fi, en aquesta història soc un nen.)

 Quin serà el codi per al 5?

Ho veieu, que és el *101*?

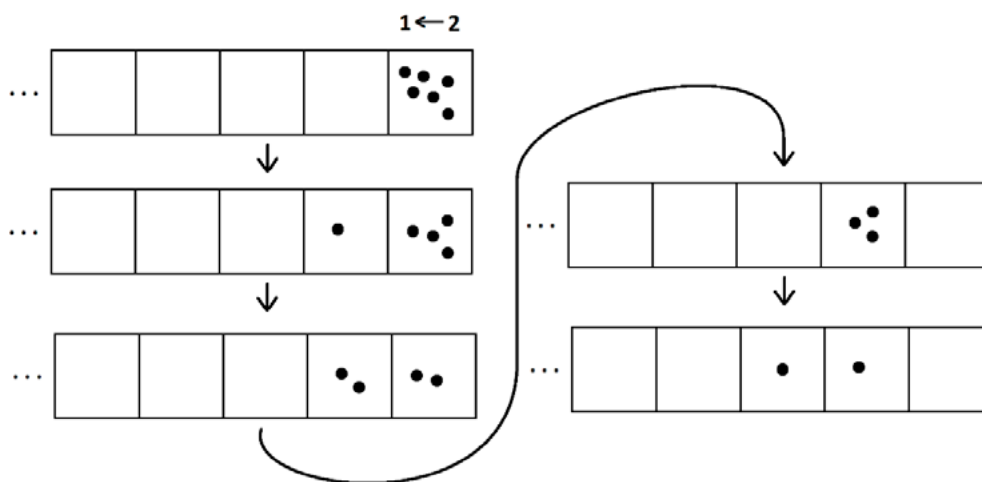
I el codi per al 6? Si afegim un altre punt al codi per al 5, tenim *110* per al 6.



Si teniu alumnes més joves, potser us resultarà interessant afegir aquest moment de reflexió que us mostrem ara.

De fet, també podem tenir aquest codi per al 6 si buidem la màquina i, a continuació, hi posem sis punts tots alhora. Cada parell de punts explotarà, un darrere l'altre, i generarà un punt a la casella de l'esquerra.

Aquí teniu una possible sèrie d'explosions (sense els efectes de so!).



Us surt el mateix codi final, *110*, si feu les explosions en un ordre diferent? (Proveu-ho!)



Quin és el codi de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al nombre 13?

(És *1101*. Podeu obtenir aquesta resposta?)

Alguns alumnes poden solucionar-ho posant un punt cada cop —7 punts, 8 punts..., i així fins a 13 punts—. Altres poden començar amb una màquina buida i posar 13 punts a la casella de més a la dreta.

Però no és important dedicar temps a aquesta qüestió. Si als alumnes els costa respondre aquesta pregunta, digueu: «Sí. Bona resposta. Potser és una mica difícil, continuem». I continueu! Ja tornareu més tard a aquesta qüestió, i els alumnes estaran orgullosos de veure que llavors que sí poden respondre fàcilment aquesta pregunta. Intenteu que la lliçó sigui lleugera, divertida i sense pressió.

Hores i hores de diversió jugant amb codis en una màquina $1 \leftarrow 2$.

I un dia vaig tenir una sorprenent revelació!



Material A: La màquina $1 \leftarrow 2$

Utilitzeu el material que trobareu a continuació per als alumnes que vulguin practicar amb les preguntes d'aquesta lliçó i reflexionar-hi després a casa. NO són deures, és totalment opcional. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten. Experiència 1*)

Punts que exploten

Experiència 1: Les màquines

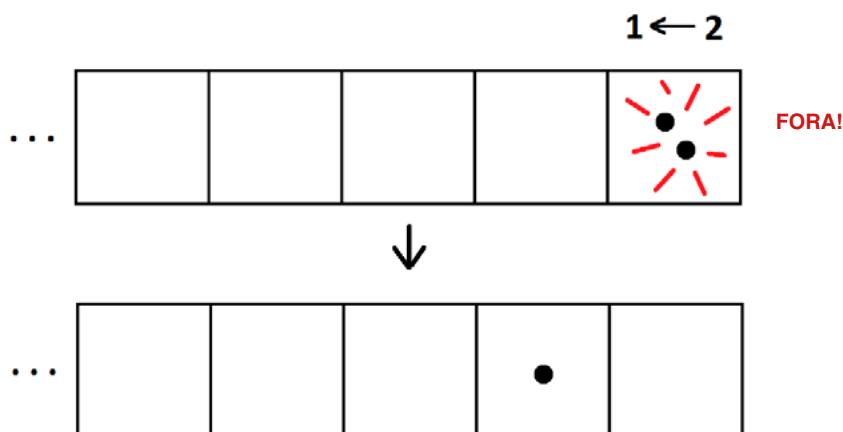
Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material A: La màquina $1 \leftarrow 2$

Aquesta és la regla per a una màquina $1 \leftarrow 2$:

Quan hi ha dos punts en una casella, exploten i desapareixen —FORA!— i són substituïts per un punt a la casella de l'esquerra.



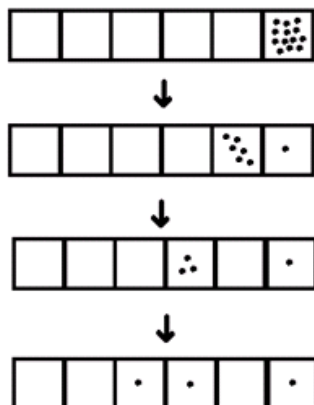
I aquí teniu algunes preguntes que, si voleu, podeu intentar fer:

- Quin és el codi de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al nombre 13? (És 1101. Podeu obtenir aquesta resposta?)
 - Quin és el codi per al 50 en aquesta màquina? (Vinga!)
- Podria un nombre tenir el codi 100211 en una màquina $1 \leftarrow 2$ si, sempre que podem, optem per fer explotar els punts?
- REPTE:** A quin nombre correspon el codi 10011 en una màquina $1 \leftarrow 2$?



Solucions a les preguntes de «Material A»

1. a) Aquí veiem com es genera el codi *1101* a partir de tretze punts.



- b) El nombre 50 té el codi *110010*.
2. Si decidim optar per fer explotar els punts sempre que puguem, aleshores el codi *100211* no està complet: els dos punts de la tercera casella abans de l'últim poden explotar i, aleshores, donar *101011* com a codi final.
3. Aquest és el codi per al nombre 19. (En la propera experiència descobrirem un mètode àgil per poder-ho veure.)

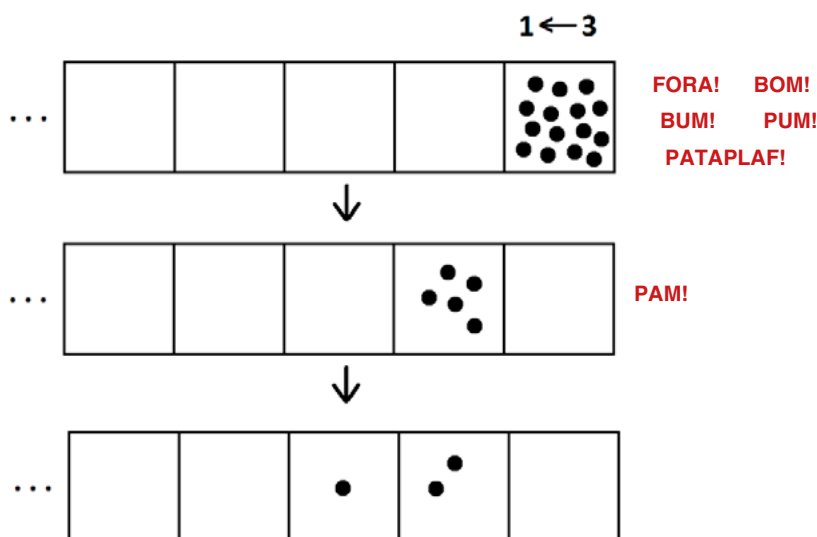
Altres màquines

Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:02 minuts].

Vaig veure que, a més de jugar amb la màquina $1 \leftarrow 2$, podia jugar amb una màquina $1 \leftarrow 3$ (també escrit i llegit cap enrere: «[màquina] tres-u»). Llavors, quan tenim *tres* punts en una casella, exploten i desapareixen, i són substituïts per un punt que va a la casella de l'esquerra.

El vídeo segueix un guió molt semblant al d'una màquina $1 \leftarrow 2$: esbrinar el codi per a 1 punt, 2 punts, 3 punts, 4 punts, 5 punts, 6 punts i..., de sobte, 13 punts.

Alternativament, es podria adoptar aquest enfocament.



Això és el que passa amb quinze punts en una màquina $1 \leftarrow 3$:

Primer hi ha cinc explosions a la primera casella, i cada explosió genera un punt a la segona casella cap a l'esquerra. A continuació, tres d'aquests punts exploten i desapareixen. Això fa que en quedin dos punts i que n'aparegui un de nou, un lloc cap a l'esquerra. Així obtenim el codi 120 per al nombre 15 en una màquina $1 \leftarrow 3$.



Quin és el codi de la màquina $1 \leftarrow 3$ per al nombre 13?

De nou, si veieu que els alumnes tenen alguna dificultat amb aquesta qüestió, escriviu: «És complicat», i proposeu que tirem endavant. Si hi ha alumnes familiaritzats amb els codis en base tres i diuen la resposta, perfecte. Escriviu la resposta amb un interrogant al costat i digueu: «Necessito més temps. Encara hi he de pensar una mica».



Hores i hores de diversió esbrinant el codi d'alguns nombres en una màquina $1 \leftarrow 3$.

I, aleshores, vaig tenir una altra revelació. A més d'una màquina $1 \leftarrow 3$, vaig veure que podia fer una màquina $1 \leftarrow 4$, o $1 \leftarrow 5$, o qualsevol altra màquina numerada que volgués!

Material B: Altres màquines

Utilitzeu el material que trobareu a continuació per als alumnes que vulguin practicar amb les preguntes d'aquesta lliçó i reflexionar-hi després a casa. NO són deures, és totalment opcional. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten. Experiència 1.*)

Punts que exploten

Experiència 1: Les màquines

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: Altres màquines

A continuació trobareu més preguntes que, si voleu, podeu plantejar:

1. a) Mostrar que el codi per al 4 en una màquina $1 \leftarrow 3$ és *II*.
b) Mostrar que el codi per al 13 en una màquina $1 \leftarrow 3$ és *III*.
c) Mostrar que el codi per al 20 en una màquina $1 \leftarrow 3$ és *202*.
2. Pot un nombre tenir el codi *2041* en una màquina $1 \leftarrow 3$? En cas afirmatiu, aquest codi seria «estable»?
3. Quin nombre té el codi *1022* en una màquina $1 \leftarrow 3$?

I podem seguir així!

4. Quina penseu que és la regla per a una màquina $1 \leftarrow 4$?
Quin és el codi $1 \leftarrow 4$ per al nombre 13?
5. Quin és el codi $1 \leftarrow 5$ per al nombre 13?
6. Quin és el codi $1 \leftarrow 9$ per al nombre 13?
7. Quin és el codi $1 \leftarrow 5$ per al nombre 12?
8. Quin és el codi $1 \leftarrow 9$ per al nombre 20?
9. a) Quin és el codi $1 \leftarrow 10$ per al nombre 13?
b) Quin és el codi $1 \leftarrow 10$ per al nombre 37?
c) Quin és el codi $1 \leftarrow 10$ per al nombre 5846?



Solucions a les preguntes de «Material B»

1. a) Fes-ho! b) Fes aquest també! c) Estàs imparable. Fes aquest tercer també!
2. Com abans, si acordem fer totes les explosions que puguem, aquest codi no estarà complet: tres dels punts de la segona casella abans de l'última poden explotar i, aleshores, donar *2111* com a codi.
3. Aquest codi el té el nombre 35.
4. «Quatre punts situats en qualsevol casella exploten i són substituïts per un punt a la casella de l'esquerra». El nombre 13 té el codi *31* en una màquina $1 \leftarrow 4$.
5. És 23.
6. És 14.
7. És 22.
8. És 22. (El mateix codi que a la pregunta anterior, però, és clar, la seva interpretació és diferent.)
9. a) És 13. b) És 37. c) És 5846. (Aquests són els codis que utilitzem per als nombres en el nostre dia a dia!)



La màquina $1 \leftarrow 10$

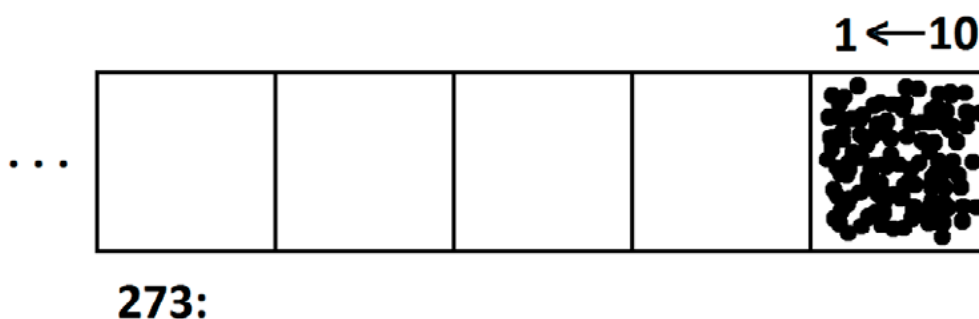
Podeu veure un vídeo de James sobre aquesta lliçó aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:56 minuts].

Molt bé. Ara fem-la ben grossa.

Anem a una màquina $1 \leftarrow 10$ i posem-hi 273 punts!

Quin és el codi secret $1 \leftarrow 10$ per al nombre 273?



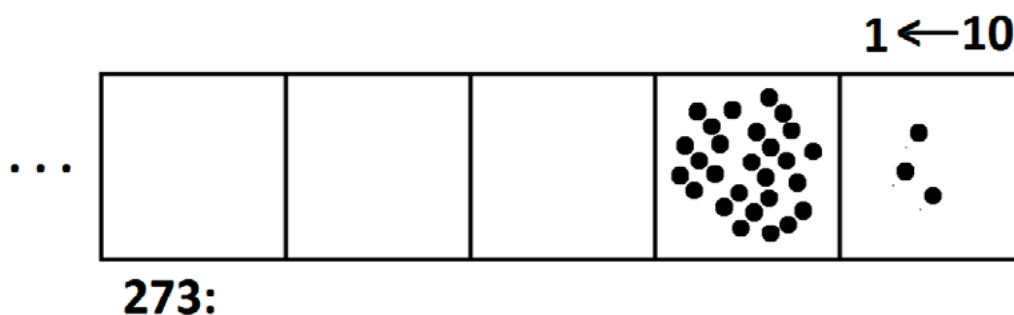
Hi vaig reflexionar a través d'una sèrie de preguntes:

Hi haurà explosions? Hi ha grups de deu que explotaran? I tant!

Quantes explosions hi haurà inicialment? Vint-i-set.

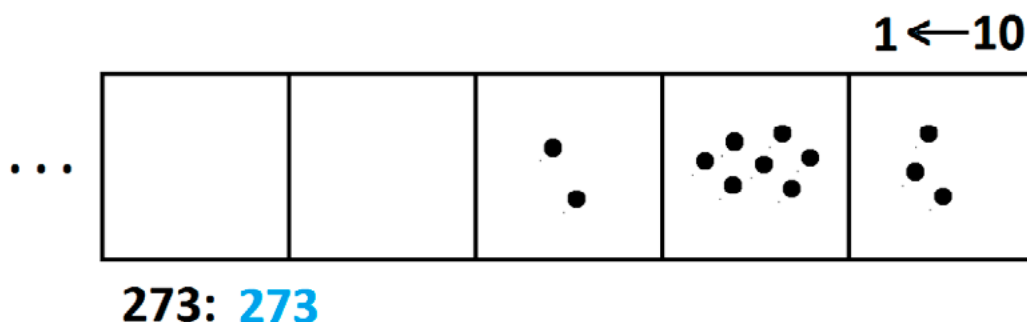
En quedarà algun punt? Sí, tres.


D'acord. Per tant, tenim vint-i-set explosions, cada una de les quals fa un punt a l'esquerra. I en quedaran tres punts.



Hi haurà més explosions? Sí, dues més.

En quedarà algun punt? Sí, set.



 El codi $1 \leftarrow 10$ per al 273 és... 273. Ostres!

Alguna cosa curiosa està passant aquí!

Quina seria la gran pregunta ara?

Arribats a aquest punt, els alumnes més grans criden «Base deu!». I jo els dic: «D'acord, és clar que teniu raó. Tingueu paciència amb mi, i assegurem-nos que s'ha entès molt bé el funcionament d'aquests sistemes de valor posicional». I passo a l'experiència següent.

Material C: Exploracions brutals

Utilitzeu el material següent per facilitar-lo als alumnes que vulguin reflexionar després a casa amb preguntes profundes relacionades amb aquesta experiència. NO són deures, és totalment opcional, però podria servir de font per a futurs projectes dels alumnes. (N'hi ha una versió imprimible al document *Punts que exploten. Experiència 1.*)

Punts que exploten

Experiència 1: Les màquines

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material C: Exploracions brutals

A sota teniu algunes investigacions sobre «grans preguntes»: podeu explorar-les o bé simplement reflexionar-hi. Totes s'aniran aclarint a mesura que la història avanci en propers capítols, però igualment pot ser divertit reflexionar sobre aquestes idees ara.

EXPLORACIÓ 1: QUÈ ESTAN FENT, AQUESTES MÀQUINES?

Podeu esbrinar què és el que estan fent aquestes màquines?

Per què el codi per al nombre 273 en una màquina $1 \leftarrow 10$ és 273? Tots els codis per a nombres d'una màquina $1 \leftarrow 10$ són idèntics a com escrivim normalment els nombres?

Si heu pogut respondre aquesta pregunta, podeu entendre també tots els codis d'una màquina $1 \leftarrow 2$? Què significa el codi 1101 per al nombre 13?

Observació: La resposta a aquestes preguntes es troba a l'experiència 2.

EXPLORACIÓ 2: L'ORDRE EN QUÈ FEM EXPLOTAR ELS PUNTS, ÉS RELLEVANT?

Poseu dinou punts en la casella de més a la dreta d'una màquina $1 \leftarrow 2$ i feu explotar uns quants parells de punts a l'atzar: primer, alguns parells a la casella situada més a la dreta; després, uns altres a la segona casella; a continuació, uns quants més a la casella situada més a la dreta; i, de nou, alguns parells a la segona casella; i així successivament. Torneu a fer-ho, aquest cop canviant l'ordre en què feu les explosions. I una vegada més, encara!

Apareix el mateix codi final 10011 cada vegada?

